| | |
|---|---|
| Title | 一般領域上のpointwise $BMO$ multiplierについて(Hardy空間の研究 : 函数環と関連して) |
| Author(s) | 後藤, 泰宏 |
| Citation | 数理解析研究所講究録 (1993), 825: 126-139 |
| Issue Date | 1993-03 |
| URL | http://hdl.handle.net/2433/83261 |
| Right | |
| Type | Departmental Bulletin Paper |
| Textversion | publisher |

数理解析研究所講究録
第 825 巻 1993 年 126-139


# 一般領域上の pointwise $BMO$ multiplier について

京都大学理学部 後藤 泰宏 (Yasuhiro Gotoh)

## §1. 序

ここでは weight $\phi$ を持った一般領域上の $BMO_\phi$ 空間について “その定義方法”, “pointwise $BMO_\phi$ multiplier”, 及び “$BMO_\phi$ 拡張領域”, の考察を中心にその性質を紹介する. $BMO_\phi$ は連続性の modulus $\phi$ を持つ連続関数の空間 $\Lambda_\phi$ と (ある場合には一致するなど) かなりの類似性を持っており $BMO_\phi$ と $\Lambda_\phi$ の関係についても紹介する.

可測関数 $\phi:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$ に対し以下のような条件を考える. $m\in\mathbf{R}$ とする.

- 条件 $(A)$ ; ある定数 $M>0$ が存在し

$$t\phi(l)\le M\phi(tl),\quad 0<t\le 1,\quad l>0,$$

$$M^{-1}\le\phi(s)/\phi(t)\le M,\quad 2^{-1}\le s/t\le 2.$$

- 条件 $(B_m)$ ; ある定数 $M>0$ が存在し

$$t\phi(l)\le M\phi(tl),\quad 0<t\le 1,\quad l>0,$$

$$\int_0^l\phi(t)t^{m-1}dt\le Ml^m\phi(l),\quad l>0.$$

$m\le m'$ であれば $(B_m)\Rightarrow(B_{m'})\Rightarrow(A)$ となる. $(B_0)$ は Dini 条件である. $\phi\in(A)$ が non decreasing であれば $\phi\in(B_1)$. また $B_{-1}$ を満たす $\phi$ は存在しない. $\phi(t)=t^\alpha$ なる形の $\phi$ に対しては $\phi\in(B_m)\Leftrightarrow -m<\alpha\le 1$.

**約束.** 以下では $\phi$ に対して常に条件 $(A)$ を仮定する.

$\mathbf{R}^n$ 上の関数 $f$ は

$$\|f\|_{*,D}=\|f\|_*=\sup\phi(l(Q))^{-1}m(Q)^{-1}\int_Q|f-f_Q|dm<\infty$$

なるとき $BMO_\phi(\mathbf{R}^n)$ 関数であるという. ここで sup は $D$ 上の, 軸に平行な辺を持つ全ての閉立方体 $Q$ について取るものとし $l(Q)$ は $Q$ の辺長, $m$ は $n$ 次元 Lebesgue 測度, $f_Q$ は $f$ の $Q$ 上での積分平均とする. この定義を一般の領域 $D\subset\mathbf{R}^n$ に拡張するには以下のような自然な 2 つの方法がある.

領域 $D\subset\mathbf{R}^n$ に対し $D$ 内の軸に平行な辺を持つ閉立方体 $Q$ で $d(Q,\partial D)\ge\lambda l(Q)$ なる, $D$ の境界から相対的に離れたものを許容立方体といいその全体を $\mathcal{A}(D)$ とする. ここで $\lambda>0$ は与えられた定数, $d(\cdot,\cdot)$ は Euclid 距離, $l(Q)$ は $Q$ の辺長とする.

**約束.** 以下単に “立方体” といえば軸に平行な辺を持つ閉立方体を指すものとする.

領域 $D\subset\mathbf{R}^n$ 上の局所可積分な関数 $f$ について

- $f$ が $BMO_\phi(D)$ 関数であるとは

$$\|f\|_{*,D} = \|f\|_* = \sup \phi(l(Q))^{-1} m(Q)^{-1} \int_Q |f - f_Q| dm < \infty$$

なることとする．ここで sup は $D$ 上の全ての立方体 $Q$ について取るものとする．また

- $f$ が $BMO_{\phi,loc}(D)$ 関数であるとは

$$\|f\|_{*,loc,D} = \|f\|_{*,loc} = \sup \phi(l(Q))^{-1} m(Q)^{-1} \int_Q |f - f_Q| dm < \infty$$

ここで sup は $\mathcal{A}(D)$ の元についてのみ取るものとする．

$BMO_{\phi,loc}(D)$ は $\lambda$ のとり方によらずに定まるので以下では $\lambda > 0$ は十分大きい定数 (具体的には $\lambda = 1000\sqrt{n}$ と取れば以下の議論には十分) として固定するものとする．

まずどのような $D$ 或は $\phi$ に対しこれらの 2 空間が一致するかを調べよう．

## §2. $BMO_{\phi,loc} = BMO_\phi$ ?

通常の $BMO$ 空間 ($\phi = 1$) に対してはこれらの 2 空間は常に一致することが知られていることに注意する．$\mathbf{R}^n$ の真部分領域 $D$ に対し $D$ 上の $\phi$-quasihyperbolic 距離を

$$k_D^\phi(x, y) = \inf_\gamma \int_\gamma \frac{\phi(d(y, \partial D))}{d(y, \partial D)} ds(y), \qquad x, y \in D,$$

と定める．ここで inf は $x$ と $y$ を結ぶ $D$ 内の全ての求長可能な曲線 $\gamma$ について取るものとする．$k_D^\phi(\cdot, x)$, $x \in D$, は常に $BMO_{\phi,loc}(D)$ において有界となっている．また

$$\Phi(x) = \int_{|x|}^1 \phi(t) t^{-1} dt, \quad x \in \mathbf{R}^n,$$

とすれば常に $\Phi \in BMO_{\phi,loc}(\mathbf{R}^n \setminus \{0\})$ となる．以下の主張，或は次節の結果より $k_D^\phi(\cdot, x)$, $x \in D$, は大域的に最大の増大度を持つ $BMO_{\phi,loc}(D)$ 関数でありまた $\Phi$ は ( $\phi \in (B_n)$ であれば) 局所的に (原点において) 最大の増大度を持つ $BMO_{\phi,loc}(\mathbf{R}^n)$ 関数であるといえる．$\Phi \in BMO_\phi(\mathbf{R}^n)$ ($= BMO_\phi(\mathbf{R}^n \setminus \{0\})$) となるための必要十分条件は $\phi \in (B_n)$ である (定理 1).

領域 $D_{n,m} \subset \mathbf{R}^n$, $n \geq 1$, $0 \leq m \leq n-1$ を

$$D_{n,m} = \begin{cases} H_n, & m = n-1, \\ \mathbf{R}^n \setminus E_{n,m}, & 1 \leq m \leq n-2, \\ \mathbf{R}^n \setminus \{0\}, & m = 0, n \geq 2. \end{cases}$$

($H_n$ は軸に平行な境界を持つ半空間, $E_{n,m}$ は軸に平行な $m$ 次元超平面) と定める．また $\mathbf{R}^n$ の真部分領域 $D$ に対し $D$ 上の関数 $F_D$ を

$$F_D(x) = \int_{d(x, \partial D)}^1 \phi(t) t^{-1} dt, \quad x \in D$$

と定める．常に $F_D \in BMO_{\phi,loc}(D)$ である．

**定理 1.** ([7]) $\phi \in (B_1)$ とすれば任意の領域 $D \subset \mathbf{R}^n$ に対し $BMO_{\phi,loc}(D) = BMO_\phi(D)$.

**定理 2.** ([7]) $\mathbf{R}^n$ の，任意に大きい立方体を含むような領域 $D$ で $BMO_{\phi,loc}(D) = BMO_\phi(D)$ となるものが存在すれば $\phi \in (B_n)$.

**定理 3.** ([7]) 以下の条件は同値である．
*(1)* $BMO_{\phi,loc}(D_{n,m}) = BMO_\phi(D_{n,m})$.
*(2)* $\phi \in (B_{n-m})$.
*(3)* $F_{D_{m,n}} \in BMO_\phi(D_{n,m})$.

**系 1.** $\mathbf{R}^n$ の全ての部分領域 $D$ に対し $BMO_{\phi,loc}(D) = BMO_\phi(D)$ となるための必要十分条件は $\phi \in (B_1)$.

**系 2.** $\mathbf{R}^n$ の部分領域 $D$ でいくらでも大きい立方体を含みかつ $BMO_{\phi,loc}(D) = BMO_\phi(D)$ となるものが存在するための必要十分条件は $\phi \in (B_n)$.

**定理 4.** ([7]) $\mathbf{R}^n$ の真部分領域 $D$ に対し以下の条件は同値である．
*(1)* $BMO_{\phi,loc}(D) = BMO_\phi(D)$.
*(2)* $k_D^\phi(\cdot, x_0)$, $x_0 \in D$, は $BMO_\phi(D)$ 関数でかつそれらは $BMO_\phi(D)$ において有界.
*(3)* $\sup \phi(l(Q))^{-1} m(Q)^{-1} \int_Q k_D^\phi(\cdot, x)dm < \infty$, ここで sup は $D$ 上の全ての立方体 $Q$ について取るものとし $x$ は $Q$ の中心とする．

以上の定理は何れも領域 (或は立方体) を Whitney 分解し，次節で導入する距離 $W_D^\phi$ が $k_D^\phi$ に相当することに注意することで証明される．そこで用いられる典型的な論法を紹介する意味で定理 4 (3) ⇒ (1) の略証を与えておく．条件 (3) を仮定し $f \in BMO_{\phi,loc}(D)$ の $Q \subset D$ 上での mean oscillation を評価しよう．$d(Q, \partial D) \le \lambda l(Q)$ としてよくそのとき $Q$ を

$$C^{-1} d(Q_k, \partial D) < l(Q_k) < C d(Q_k, \partial D)$$

なる立方体の族 $\{Q_k\}_{k=0}^K$, $0 < K \le \infty$ に分解できる．$Q_k$ の中心を $x_k$ とする．$Q_0$ は $Q$ の中心 $x$ を含むと仮定してよい．そのとき

$$|f_{Q_k} - f_{Q_0}| \le C\|f\|_{*,loc} k_D(x_k.x_0)$$

となる (次節参照)．また

$$k_D^\phi(x_k, x_0) \le C k_D^\phi(y, x_0), \quad y \in Q_k,$$

$$\phi(l(Q_k)) \le C k_D(x_k, x_0), \quad k \ge 1,$$

であることに注意すれば

$$\begin{aligned}\int_Q |f-f_{Q_0}|dm &\le \sum_{k=0}^{K}\int_{Q_k}(|f-f_{Q_k}|+|f_{Q_k}-f_{Q_0}|)dm\\ &\le \sum_{k=0}^{K}\left\{Cm(Q_k)\|f\|_{*,loc}\phi(l(Q_k))+Cm(Q_k)\|f\|_{*,loc}k_D^{\phi}(x_k,x_0)\right\}\\ &\le \sum_{k=1}^{K}C\|f\|_{*,loc}\int_{Q_k}k_D^{\phi}(\cdot,x_0)dm+Cm(Q_0)\|f\|_{*,loc}\phi(l(Q_0))\\ &\le C\|f\|_{*,loc}\int_Q k_D^{\phi}(\cdot,x_0)dm \le C\|f\|_{*,loc}m(Q)\phi(l(Q)).\end{aligned}$$

よって $f\in BMO_\phi(D)$. Q. E. D.

同様の手法を用いれば

**定理 5.** ([17], [7]) $\mathbf{R}^n$ の真部分領域 $D$ に対し以下の条件は同値である.
*(1)* $BMO_{\phi,loc}(D)\subset L^1(D)$.
*(2)* ある $x\in D$ に対し $k_D^{\phi}(\cdot,x)\in L^1(D)$.
またこのとき $f\in BMO_{\phi,loc}(D)$ に対し

$$m(D)^{-1}\int_D |f-f_D|dm \le C\|f\|_{*,loc}\inf_{x\in D}m(D)^{-1}\int_D k_D^{\phi}(\cdot,x)dm.$$

一般領域上で $BMO_\phi$ を定義するにはさらに以下のような候補も考えられる.

- $D$ 内の軸に平行な辺を持つ立方体についてのみ sup を取るのではなく $D$ 内の, 必ずしも軸に平行な辺を持つとは限らない全ての閉立方体について sup を取る.
- 立方体ではなく $D$ 内の全ての閉球について sup を取る.

このようにして得られた空間を $BMO$ のかわりにそれぞれ $BMO'$, $BMO''$ とあらわすことにする. このとき任意の領域 $D$ に対し

$$BMO_{\phi,loc}(D)=BMO'_{\phi,loc}(D)=BMO''_{\phi,loc}(D)$$

となることは容易にわかるので問題は空間 $BMO_\phi(D)$, $BMO'_\phi(D)$, $BMO''_\phi(D)$ の関係である.

**注**. $BMO$ の定義で "閉立方体" を "開立方体" としても同じ空間が得られる. $BMO'$, $BMO''$ に関しても同様.

**定理 1', 2', 3', 4', 5' 及び 系 1', 2'.** ([7]) 定理 *1, 2, 3, 4, 5* 及び 系 *1, 2* は $BMO$ だけでなく $BMO'$ に対してもそのまま成立する.

**定理 1", 2", 4", 5" 及び 系 1', 2'.** ([7]) 定理 *1, 2, 4, 5* 及び 系 *1, 2* は $BMO$ だけでなく $BMO''$ に対してもそのまま成立する.

**定理 3".** ([7]) 以下の条件は同値である.

*(1)* $BMO''_{\phi,loc}(D_{n,m}) = BMO''_{\phi}(D_{n,m})$.
*(2)* $\phi \in (B_{n-m/2})$.
*(3)* $F_{D_{m,n}} \in BMO''_{\phi}(D_{n,m})$.

**例 1.** $\phi \in (B_{n-m/2}) \setminus (B_{n-m})$ (例えば $\phi(t) = t^{\alpha}$, $-(n-m/2) < \alpha \leq -(n-m)$) と取れば

$$BMO''_{\phi}(D_{n,m}) = BMO''_{\phi,loc}(D_{n,m}) = BMO_{\phi,loc}(D_{n,m}) \neq BMO_{\phi}(D_{n,m})$$

となり $BMO''_{\phi}(D_{n,m})$ と $BMO_{\phi}(D_{n,m})$ は一致しない.

**例 2.** $D_n = \{x \in \mathbf{R}^n | \ x_1 + x_2 + \cdots + x_n > 0\}$ とすれば定理 2 の証明と同様にして $BMO_{\phi,loc}(D_n) = BMO_{\phi}(D_n)$ となるための必要十分条件は $\phi \in (B_n)$ であることがわかる. よって $\phi \in (B_n) \setminus (B_1)$ とすればやはり $BMO'_{\phi}(D_n) \neq BMO_{\phi}(D_n)$. また $BMO_{\phi}(D)$ は一般には軸の取り方に依存して定まることがわかる.

今度は $BMO$ の $L^p$ version を考えてみる. $1 \leq p < \infty$ に対し例えば $BMO_{\phi,p}(D)$ は

$$\|f\|_{*,p,D} = \|f\|_{*,p} = \sup_{Q} \phi(l(Q))^{-1} \left( m(Q)^{-1} \int_{Q} |f - f_Q|^p dm \right)^{1/p} < \infty.$$

(sup は $D$ 上の全ての立方体 $Q$ について取る.) なる $L^p_{loc}(D)$ 関数 $f$ のなす空間として定める. その他 $BMO_{\phi,p,loc}(D)$, $BMO'_{\phi,p}(D)$ 等も同様に定めるもととする. そのとき

**定理 1p.** ([7]) $1 \leq p < \infty$. $\phi \in (B_{1/p})$ とすれば任意の領域 $D \subset \mathbf{R}^n$ に対し $BMO_{\phi,p,loc}(D) = BMO_{\phi,p}(D)$.

**定理 2p.** ([7]) $1 \leq p < \infty$ とする. もし $\mathbf{R}^n$ の, 任意に大きい立方体を含むような領域 $D$ で $BMO_{\phi,p,loc}(D) = BMO_{\phi,p}(D)$ となるものが存在すれば $0 < q < p$ なる任意の $q$ に対し $\phi \in (B_{n/q})$.

この定理で結論を “$\phi \in (B_{n/p})$” と置き換えられるかどうかはわかっていない.

**定理 3p.** ([7]) $1 \leq p < \infty$ とし次の *3* 条件を考える.
*(1)* $\phi \in (B_{(n-m)/p})$.
*(2)* $BMO_{\phi,p,loc}(D_{n,m}) = BMO_{\phi,p}(D_{n,m})$.
*(3)* $F_{D_{m,n}} \in BMO_{\phi,p}(D_{n,m})$.
そのとき常に *(1)* $\Rightarrow$ *(2)* $\Rightarrow$ *(3)*. また *(3)* であれば $0 < q < p$ なる任意の $q$ に対し $\phi \in (B_{(n-m)/q})$.

この定理でやはり (3) $\Rightarrow$ (1) が正しいかどうかはわかっていない.

**定理 4p.** ([7]) $1 \leq p < \infty$, $D$ を $\mathbf{R}^n$ の真部分領域とする. そのとき以下の *3* 条件は同値である.
*(1)* $BMO_{\phi,p,loc}(D) = BMO_{\phi,p}(D)$.
*(2)* $k^{\phi}_{D}(\cdot, x_0)$, $x_0 \in D$ は $BMO_{\phi,p}(D)$ 関数となりかつそれらは $BMO_{\phi,p}(D)$ において有界.

*(3)* $\sup \phi(l(Q))^{-1}\left(m(Q)^{-1}\int_Q (k_D^\phi(\cdot,x))^p dm\right)^{1/p} < \infty$, ここで sup は $D$ 上の全ての立方体 $Q$ について取るものとし $x$ は $Q$ の中心とする.

**定理 5p.** ([7]) $1 \le p < \infty$, $D$ を $\mathbf{R}^n$ の真部分領域とする. そのとき以下の *3* 条件は同値である.
*(1)* $BMO_{\phi,p,loc}(D) \subset L^p(D)$.
*(2)* ある $x \in D$ に対し $k_D^\phi(\cdot,x) \in L^p(D)$.
またこのとき $f \in BMO_{\phi,p,loc}(D)$ に対し

$$\left(m(D)^{-1}\int_D |f-f_D|^p dm\right)^{1/p} \le C\|f\|_{*,p,loc} \inf_{x\in D}\left(m(D)^{-1}\int_D (k_D^\phi(\cdot,x))^p dm\right)^{1/p}.$$

**定理 1p', 2p', 3p', 4p', 5p' 及び 1p", 2p", 3p", 4p", 5p".** ([7]) 定理 *1p, 2p, 3p, 4p, 5p* に相当する結果は $BMO$ だけでなく $BMO'$, $BMO''$ に対しても成立する.

## §3. 一般領域上の $BMO_{\phi,loc}$ muitiplier

領域 $D \subset \mathbf{R}^n$ 上の関数空間 $X$ に対し $D$ 上の関数 $g$ は全ての $f \in X$ に対し $f$ と $g$ の pointwise の積 $T_g(f) = gf$ がやはり $X$ の元となるとき (poiniwise) $X$ multiplier という.

$BMO_\phi(D)$ multiplier, 或は $BMO_{\phi,loc}(D)$ multiplier を扱う上では定数を 0 とみなさない norm

$$\|f\|_{**,\phi,D,Q_0} = \|f\|_{**} = \|f\|_* + |f|_{Q_0}\phi(l(Q_0))^{-1}, \quad f \in BMO_\phi(D),$$

$$\|f\|_{**,loc,\phi,D,Q_0} = \|f\|_{**,loc} = \|f\|_{*,loc} + |f|_{Q_0}\phi(l(Q_0))^{-1}, \quad f \in BMO_{\phi,loc}(D),$$

を導入するほうが扱いよい. ここで $Q_0 \in \mathcal{A}(D)$ は任意に固定された立方体とする. そのときの $T_g$ の作用素 norm を $\|T_g\|_*$, $\|T_g\|_{*,loc}$ とあらわすことにする.

**定理 6.** ([13], [12]) $\phi \in (B_n)$ とするとき $\mathbf{R}^n$ 上の可測関数 $g$ について $g$ が $BMO_\phi(\mathbf{R}^n)$ $(= BMO_{\phi,loc}(\mathbf{R}^n))$ *multiplier* であるための必要十分条件は $g \in L^\infty(D)$ かつ

$$m(Q)^{-1}\int_Q |g-g_Q|dm \le C\frac{\phi(l(Q))}{\psi^\phi(Q,Q_0)}, \quad Q \in \mathcal{A}(\mathbf{R}^n).$$

なることである.

ここではこの定理を一般の領域に拡張する. 一般に $f \in L^1(Q)$ 及び $g \in L^\infty(Q)$ に対して

$$\left| |f_Q| m(Q)^{-1}\int_Q |g-g_Q|dm - m(Q)^{-1}\int_Q |gf-(gf)_Q|dm\right| \le 2\|g\|_\infty m(Q)^{-1}\int_Q |f-f_Q|dm.$$

となることに注意すれば $BMO_{\phi,loc}(D)$ multiplier の特徴づけ問題は $f \in BMO_{\phi,loc}(D)$ に対し $|f_Q|$, $Q \in \mathcal{A}(D)$ の増大度を評価する問題とほぼ同じである. Nakai [12] においても $Q, Q' \in \mathcal{A}(\mathbf{R}^n)$ に対し

$$\sup\{|f_Q - f_{Q'}| \mid \|f\|_* \le 1\}$$

がほぼ $\psi^\phi(Q,Q')$ と比較可能なことを暗に示すことによって定理 6 を証明している. (Nakai [12] ではより一般的な設定のもとで定理 6 を証明している.)

部分領域 $D\subset \mathbf{R}^n$ に対し $\mathcal{A}(D)$ の元の列 $Q_0,Q_1,\cdots,Q_k$ は

$$Q_i\cap Q_{i+1}\neq\emptyset,\qquad 0\leq i\leq k-1,$$
$$2^{-1}\leq l(Q_{i+1})/l(Q_i)\leq 2,\quad 0\leq i\leq k-1,$$

なるとき許容鎖という.

- $\mathcal{A}(D)$ 上の 距離 $\delta_D^\phi$ を

$$\delta_D^\phi(Q,Q')=\inf\{\sum_{i=0}^{k}\phi(l(Q_i))\mid Q=Q_0,Q_1,\cdots,Q_k=Q'\ \text{は許容鎖}\}.$$

　と定める.

$f\in BMO_{\phi,loc}(D)$ に対し

$$|f_Q-f_{Q'}|\leq C\|f\|_{*,loc}\delta_D^\phi(Q,Q'),\quad Q,Q'\in\mathcal{A}(D).$$

なることは容易にわかる. 以下でみるようにこの評価は (ほぼ) 最良である (定理 7).

$\mathbf{R}^n$ の真部分領域 $D$ に対し $D$ の

$$\lambda\leq d(Q_i,\partial D)/l(Q_i)\leq 2\lambda+\sqrt{n}$$

なる $Q$ の dyadic な立方体の族 $\mathcal{D}(D)$ への Whitney 分解を一つ固定する. $\mathcal{D}(D)$ の 元の列 $Q_0,Q_1,\cdots,Q_k$ は

$$Q_{i+1}\cap Q_i\neq\emptyset,\quad 0\leq i\leq k-1,$$

なるとき Whitney 鎖という.

- $\mathcal{D}(D)$ 上の 距離 $W_D^\phi$ を

$$W_D^\phi(Q,Q')=\inf\{\sum_{i=0}^{k}\phi(l(Q_i))\mid Q=Q_0,Q_1,\cdots,Q_k=Q'\ \text{は Whitney 鎖}\}.$$

　と定める.

$W_D^\phi$ は $\phi$-quasihyperbolic 距離 $k_D^\phi$ に対応している. $\mathcal{D}(D)\subset\mathcal{A}(D)$ より Whitney 鎖は許容鎖である. 定義より

$$\delta_D^\phi(Q,Q')\leq W_D^\phi(Q,Q'),\quad Q,Q'\in\mathcal{D}(D).$$

- また $Q,Q'\in\mathcal{A}(D)$ に対し

$$\sigma_D^\phi(Q,Q')=\begin{cases}\psi^\phi(Q,Q'), & Q\cup Q'\subset\exists Q''\subset D\ \text{なるとき},\\ \psi^\phi(Q,\tilde{Q})+W_D^\phi(\tilde{Q},\tilde{Q}')+\psi^\phi(Q',\tilde{Q}'), & \text{他},\end{cases}$$

　とする.

ここで $\tilde{Q}, \tilde{Q}'$ はそれぞれ $Q, Q'$ の中心を含む $\mathcal{D}(D)$ の元とする．$D = \mathbf{R}^n$ であれば $\sigma_D^\phi = \psi^\phi$ である．

- さらに
$$\rho_D^\phi(Q, Q') = \sup |f_Q - f_{Q'}| + \phi(l(Q)) + \phi(l(Q')), \quad Q, Q' \in \mathcal{A}(D),$$
とする．ここで sup は $\|f\|_{*,loc} \le 1$ なる $BMO_{\phi,loc}(D)$ 関数 $f$ の全体について取るものとする．

そのとき

**定理 7.** ([8]) $D$ を $\mathbf{R}^n$ の任意の領域，$\phi \in (B_n)$ とするとき $\delta_D^\phi$, $\rho_D^\phi$, $\sigma_D^\phi$ は互いに比較可能である．

それゆえ先に述べたようにこの定理の系として定理 6 の一般化である次の結果を得る．

**定理 8.** ([8]) $\phi \in (B_n)$ とするとき領域 $D \subset \mathbf{R}^n$ 上の可測関数 $g$ について $g$ が $BMO_{\phi,loc}(D)$ *multiplier* であるための必要十分条件は $g \in L^\infty(D)$ かつ
$$m(Q)^{-1} \int_Q |g - g_Q| dm \le C \frac{\phi(l(Q))}{\delta_D^\phi(Q, Q_0)}, \quad Q \in \mathcal{A}(D)$$
なることである．

この定理及び系 1 より $\phi \in (B_1)$ であれば任意の領域 $D$ について $BMO_\phi(D)$ multiplier の特徴付けも得られたことになる．

**(定理 7 の略証)** $\rho_D^\phi \le C\delta_D^\phi$ なることはすでに注意した．

($\delta_D^\phi \le C\sigma_D^\phi$ の証明) $Q, Q' \subset Q'' \subset D$ なる立方体 $Q''$ の存在しない場合についてのみ証明する．そのような $Q, Q' \in \mathcal{A}(D)$ に対し $\tilde{Q}$, $\tilde{Q}'$ をそれぞれ $Q$, $Q'$ の中心を含む $\mathcal{D}(D)$ の元とする．そのとき $\delta_D^\phi(Q, Q') \le \delta_D^\phi(Q, \tilde{Q}) + \delta_D^\phi(\tilde{Q}, \tilde{Q}') + \delta_D^\phi(\tilde{Q}', Q')$ 及び $\delta_D^\phi(\tilde{Q}, \tilde{Q}') \le W_D^\phi(\tilde{Q}, \tilde{Q}')$ より $\delta_D^\phi(Q, \tilde{Q}) \le C\psi^\phi(Q, \tilde{Q})$ を示せば十分であるがこれは $Q$ と $\tilde{Q}$ を結ぶ許容鎖を具体的に構成することよりわかる．

($\sigma_D^\phi \le C\delta_D^\phi$ の証明) やはり $Q, Q' \subset Q'' \subset D$ なる立方体 $Q''$ の存在しない場合についてのみ証明する．そのような $Q, Q' \in \mathcal{A}(D)$ に対し $\tilde{Q}$, $\tilde{Q}'$ を先程のそれとする．そのとき $\psi^\phi(Q, \tilde{Q})$, $W_D^\phi(\tilde{Q}, \tilde{Q}')$, $\psi^\phi(\tilde{Q}', Q')$ と $|f_Q - f_{\tilde{Q}}|$, $|g_Q - g_{\tilde{Q}}|$, $|h_Q - h_{\tilde{Q}}|$ がそれぞれ (ほぼ) 比較できるような $BMO_{\phi,loc}(D)$ norm の評価できる関数 $f, g, h$ を見出せば (後はそれらを適当に modify することで) 証明できる．$Q$ の中心を $x_0$ とすれば $\phi \in (B_n)$ より定理 1 から
$$f(x) = \Phi(x - x_0) = \int_{|x - x_0|}^1 \phi(t) t^{-1} dt$$
として $\|f\|_{*,loc} \le C$ かつ $f_Q - f_{\tilde{Q}}$ は (ほぼ) $\psi^\phi(Q, \tilde{Q})$ と比較できることがわかる．$\psi^\phi(Q', \tilde{Q}')$ についても同様である．また $g(x) = k_D^\phi(x, x_0)$ と定めれば $\|g\|_{*,loc} \le C$ かつ $g_{\tilde{Q}'} - g_{\tilde{Q}}$ は $W_D^\phi(\tilde{Q}, \tilde{Q}')$ と比較できることもわかる．　Q. E. D.

## §4. $BMO_\phi$ と $\Lambda_\phi$ の関係

**約束.** この節では $\phi$ としては条件 $(A)$ のほかさらにに単調非減少かつ $\lim_{t\to+0}\phi(t)=0$ を満たすものだけを考える.

$D$ 上の連続関数 $f$ について

- $f$ が $\Lambda_\phi(D)$ 関数であるとは

$$\|f\|_{+,D}=\|f\|_{+}=\sup_{x,y\in D}\phi(|x-y|)^{-1}|f(x)-f(y)|<\infty.$$

- $f$ が $\Lambda_{\phi,loc}(D)$ 関数であるとは

$$\|f\|_{+,loc,D}=\|f\|_{+,loc}=\sup\phi(|x-y|)^{-1}|f(x)-f(y)|<\infty.$$

  ここで sup は $x,y\in Q\subset D$ なる $Q$ の存在するような 2 点 $x,y\in D$ の全体について取るものとする.

- $f$ が $\Lambda_{\phi,loc,loc}(D)$ 関数であるとは

$$\|f\|_{+,loc,loc,D}=\|f\|_{+,loc,loc}=\sup\phi(|x-y|)^{-1}|f(x)-f(y)|<\infty.$$

  ここで sup は $x,y\in Q$ なる $Q\in\mathcal{A}(D)$ の存在するような 2 点 $x,y\int D$ の全体について取るものとする.

$\Lambda_{\phi,loc,loc}(D)$ は $\mathcal{A}(D)$ を定める定数 $\lambda$ の取り方によらずに定まる. これらの空間の間には以下のような関係がある (cf. [16], [11]).

(1) 任意の領域 $D\subset\mathbf{R}^n$ に対し $\Lambda_\phi(D)=\Lambda_\phi(\mathbf{R}^n)|D$.

(2) $\phi\in(B_0)$ であれば任意の領域 $D\subset\mathbf{R}^n$ に対し

$$\Lambda_{\phi,loc}(D)=\Lambda_{\phi,loc,loc}(D)=BMO_\phi(D)=BMO_{\phi,loc}(D).$$

(3) 逆にいくらでも大きい立方体を含むような領域 $D\subset\mathbf{R}^n$ で $\Lambda_{\phi,loc,loc}(D)=\Lambda_{\phi,loc}(D)$ なるものが存在すれば $\phi\in(B_0)$.

**注.** $\phi\in(B_0)$ なるとき $BMO_{\phi,loc}(D)=\Lambda_{\phi,loc,loc}(D)$ であることは定理 1 を用いれば以下のようにしても示される. まず一般に $\phi\in(B_n)$, $f\in BMO_{\phi,loc}(D)$ , $Q''\subset D$ とすれば定理 1 より $Q,Q'\subset Q''$ なる $Q,Q'\in\mathcal{A}(D)$ に対して

$$|f_Q-f_{Q'}|\le C\|f\|_{*,loc}\psi^\phi(Q,Q')=C\|f\|_{*,loc}\int_{\min\{l(Q),l(Q')\}}^{2(l(Q)+l(Q')+d(Q,Q'))}\phi(t)t^{-1}dt$$

となる. よって $\omega(l)=\int_0^l\phi(t)t^{-1}dt<\infty$ であれば $Q,Q'$ をそれぞれ $f$ の Lebesgue 点 $x,y\in Q''$ に収束させることで

$$|f(x)-f(y)|\le C\|f\|_{*,loc}\omega(|x-y|)$$

を得る．よって $f$ は各 $Q'' \subset D$ において高々連続性の modulus $\omega$ を持つ連続関数となっている ([16])．特に $\phi \in (B_0)$ であれば $BMO_{\phi,loc}(D) \subset \Lambda_{\phi,loc}(D)$ を得る．逆に $\Lambda_{\phi,loc,loc}(D) \subset BMO_{\phi,loc}(D)$ は明らか．またこの議論から $BMO_{\phi,loc}(D)$ が連続関数ばかりからなるための必要十分条件は $\int_0^\varepsilon \phi(t)t^{-1}dt < \infty$ である ([16])．

**注**．(1) は例えば以下のようにしてわかる．$\phi \in (A)$ であれば $\phi$ を適当に modify することで $\phi(t)/t$ が単調非減少と仮定してよい．このとき $\phi(a+b) \le \phi(a) + \phi(b)$, $a, b > 0$ となるので $d_\phi(x,y) = \phi(|x-y|)$, $x, y \in \mathbf{R}^n$, は $\mathbf{R}^n$ 上の距離を定める．すると $\Lambda_\phi(D)$ は距離 $d_\phi$ についての Lipschitz 連続関数のなす空間そのものである．ここで一般に距離空間 $(X, d)$ 及び $X$ の部分集合 $Y$ が与えられたとき Lipschitz 連続な $Y$ 上の関数がいつでも $X$ 上の Lipschitz 連続関数に拡張できることから $\Lambda_\phi(D) = \Lambda_\phi(\mathbf{R}^n)|D$ が従う．

ここで $\Lambda$ 空間に対し $BMO$ 空間での $\rho, \sigma, \delta$ に相当する量 $\hat{\rho}, \hat{\sigma}, \hat{\delta}$ を以下のように定めよう．

- $x, y \in D$ に対し
$$\hat{\rho}_D^\phi(x,y) = \sup_{x,y \in D} |f(x) - f(y)|,$$
ここで sup は $\|f\|_{+,loc,loc} \le 1$ なる $\Lambda_{\phi,loc,loc}(D)$ 関数 $f$ の全体について取るものとする．
- $x, y \in D$ に対し
$$\hat{\sigma}_D^\phi(x,y) = \begin{cases} \phi(|x-y|), & x, y \in \exists Q'' \in \mathcal{A}(D) \text{ なるとき}, \\ k_D^\phi(x,y), & \text{他}, \end{cases}$$
- $\phi$ が $\int_0^\varepsilon \phi(t)t^{-1}dt < \infty$ を満たす場合について $x, y \in D$ に対し
$$\hat{\delta}_D^\phi(x,y) = \lim_{\substack{\mathcal{A}(D) \ni Q \to x \\ \mathcal{A}(D) \ni Q \to y}} \delta_D^\phi(Q, Q'), \quad x, y \in D$$
とおく．(この極限は常に存在する．)

このとき定理 7 に相当する結果として

**定理 9**．任意の領域 $D \subset \mathbf{R}^n$ に対し $\hat{\rho}_D^\phi$, $\hat{\sigma}_D^\phi$ は互いに比較可能である．更に $\phi \in (B_0)$ であれば $\hat{\delta}_D^\phi$ もこれらと比較可能となる．

$\hat{\rho}_D^\phi$ は $D$ 上の距離となっておりしかも $\Lambda_{\phi,loc,loc}(D)$ は距離空間 $(D, \hat{\rho}_D^\phi)$ 上の Lipschitz 連続関数の空間そのものである．ここで一般に

**補題**．距離空間 $(X, d)$ 上の *Lipschitz* 連続関数全体のなす空間を $L(X, d)$ とするとき $X$ 上の関数 $g$ が *(pointwisw)* $L(X, d)$ *multiplier* となるための必要十分条件は $g$ が有界かつ
$$|g(x) - g(y)| \le C \frac{d(x,y)}{1 + d(x, y_0)}, \quad x, y \in X,$$
なることである．ここで $y_0$ は $X$ の定点とする．

であることに注意すれば $D$ 上の関数 $g$ が $\Lambda_{\phi,loc,loc}(D)$ multiplier となるための必要十分条件は $g$ が有界かつ

$$|g(x)-g(y)| \leq C\frac{\hat{\rho}_D^{\phi}(x,y)}{1+\hat{\rho}_D^{\phi}(x,y_0)}, \quad x,y\in D,$$

である ($y_0$ は任意に指定した $D$ の定点). この条件は容易に以下のように書き直せる.

**定理 10.** ([?]) $D$ 上の関数 $g$ が $\Lambda_{\phi,loc,loc}(D)$ *multiplier* となるための必要十分条件は $g$ が有界かつ $x,y\in Q$ なる $Q\in\mathcal{A}(D)$ の存在するような *2* 点 $x,y\in D$ に対し常に

$$|g(x)-g(y)| \leq C\frac{\phi(x,y)}{1+\hat{\sigma}_D^{\phi}(x,y_0)},$$

となることである. ここで $y_0$ は $D$ の定点とする.

この定理 10 が定理 8 の起源とも言える.

## §5. $BMO_\phi$ 拡張領域, $\Lambda_\phi$ 拡張領域, 一様領域

$\mathbf{R}^n$ の部分領域 $D_1\subset D_2$ について

- $BMO_{\phi,loc}(D_1)$ 関数が常にある $BMO_{\phi,loc}(D_2)$ 関数に拡張できるとき、すなわち

$$BMO_{\phi,loc}(D_1)\subset BMO_{\phi,loc}(D_2)|D_1 \qquad (\text{“}\subset\text{” は “}=\text{” としても同じ})$$

  なるとき $D_1$ は $D_2$ に関する $BMO_{\phi,loc}$ 拡張領域という. 特に $D_2=\mathbf{R}^n$ なる場合は $D_1$ を単に $BMO_{\phi,loc}$ 拡張領域という
- 同様に

$$\Lambda_{\phi,loc,loc}(D_1)\subset\Lambda_{\phi,loc,loc}(D_2)|D_1, \qquad (\text{“}\subset\text{” は “}=\text{” としても同じ})$$

  なるとき $D_1$ は $D_2$ に関する $\Lambda_{\phi,loc,loc}$ 拡張領域という. 特に $D_2=\mathbf{R}^n$ なる場合は $D_1$ を単に $\Lambda_{\phi,loc,loc}$ 拡張領域という

まず $\Lambda_{\phi,loc,loc}$ についての拡張領域のついて考える. しばらくは (定理 11 まで) $\phi$ は §4 での仮定 (単調非減少かつ $\lim_{t\to+0}\phi(t)=0$) を満たすとする. 一般に

**補題.** 距離空間 $(X,d_X)$ 及び $(Y,d_Y)$ について $Y$ は $X$ の部分集合であるとする. $L(X,d_X)$, $L(Y,d_Y)$ をそれぞれにおける *Lipschitz* 連続関数全体のなす空間とする. そのとき

$$L(Y,d_Y)\subset L(X,d_X)|Y$$

となるための必要十分条件は $Y$ 上 $d_Y\leq Cd_X$ なることである.

に注意すれば $D_1$ が $D_2$ に関する $\Lambda_{\phi,loc,loc}$ 拡張領域となるための必要十分条件は

$$\hat{\rho}_{D_1}^{\phi}(x,y)\leq C\hat{\rho}_{D_2}^{\phi}(x,y), \quad x,y\in D_1$$

であることがわかる. このことから容易に

**定理 11.** (cf. [3], [11]) $\mathbf{R}^n$ の部分領域 $D_1 \subset D_2$, $D_1 \neq \mathbf{R}^n$, について $D_1$ が $D_2$ に関する $\Lambda_{\phi,loc,loc}$ 拡張領域であるための必要十分条件は

$$k^{\phi}_{D_1}(x,y) \leq C\hat{\rho}^{\phi}_{D_2}(x,y), \qquad x,y \in D_1.$$

特に $\mathbf{R}^n$ の真部分領域 $D$ が $\Lambda_{\phi,loc,loc}$ 拡張領域であるための必要十分条件は

$$k^{\phi}_{D}(x,y) \leq C\phi(|x-y|), \qquad x,y \in D.$$

以上のように $\Lambda_\phi$ 空間についての拡張領域の特徴づけは比較的容易である．それに対し $BMO_\phi$ 空間に対する拡張領域の特徴づけは以下に述べる通常の $BMO$ 空間の場合以外ほとんどなにも知られていないようである．$\phi \in (B_n)$ とすれば $BMO_\phi(D)$ は距離空間 $(\mathcal{A}(D), \delta^{\phi}_{D})$ 上の Lipschitz 連続関数全体のなす空間 $L(\mathcal{A}(D), \delta^{\phi}_{D})$ に埋込むことができた．($\delta^{\phi}_{D}$ 自身は距離ではないが必要ならば $Q = Q'$ の場合については $\delta^{\phi}_{D}(Q,Q') = 0$ と定義し直すことで距離となる.) このことから

**予想.** $\phi \in (B_n)$ とするとき $\mathbf{R}^n$ の部分領域 $D_1 \subset D_2$ について $D_1$ が $D_2$ に関する $BMO_{\phi,loc}$ 拡張領域となるための必要十分条件は

$$\delta^{\phi}_{D_1}(Q,Q') \leq C\delta^{\phi}_{D_2}(Q,Q'), \quad Q,Q' \in \mathcal{A}(D_1)$$

となることであろう．

$D_1$ が $D_2$ に関する $BMO_{\phi,loc}$ 拡張領域であるとき常に $\mathcal{A}(D_1) \times \mathcal{A}(D_1)$ 上 $\delta^{\phi}_{D_1} \leq C\delta^{\phi}_{D_2}$ となることはわかる．この逆についても $\phi \in (B_0)$ であれば $\Lambda_{\phi,loc,loc}$ についての拡張領域の場合に帰着され, 定理 9, 11 より正しいことがわかる．しかしこれ以外の場合については通常の $BMO$ 空間の場合意外わかっていないように思われる．

**定理 12.** ([10], [5]) 先の予想は $\phi = 1$ なる場合, すなわち通常の $BMO$ 空間 $BMO_{1,loc}$ $(= BMO_1)$ に対しては正しい．

ここで

$$\delta^{\phi}_{D_1}(Q,Q') \leq C\delta^{\phi}_{D_2}(Q,Q'), \quad Q,Q' \in \mathcal{A}(D_1)$$

なる条件は $D_1$ が $\mathbf{R}^n$ の真部分領域であれば

$$W^{\phi}_{D_1}(Q,Q') \leq C\delta^{\phi}_{D_2}(Q,Q'), \quad Q,Q' \in \mathcal{D}(D_1)$$

と同値でありしかも $W^1_{D_1}(Q,Q')$, $Q,Q' \in \mathcal{D}(D_1)$ は $k^1_D(x,y)$ に, また $\delta^1_{D_2}(Q,Q')$, $Q,Q' \in \mathcal{D}(D_1)$ は

$$j_{D_1,D_2}(x,y) = \begin{cases} \log\left(1+\dfrac{|x-y|}{d(x,\partial D_1)}\right)\left(1+\dfrac{|x-y|}{d(y,\partial D_1)}\right), & x,y \in \exists Q \in \mathcal{A}(D_2) \text{ なるとき}, \\ k^1_{D_2}(x,y) + \log\dfrac{d(x,\partial D_2)}{d(x,\partial D_1)}\dfrac{d(y,\partial D_2)}{d(y,\partial D_1)}, & \text{他}, \end{cases}$$

に対応していることから $\mathcal{A}(D_1)\times\mathcal{A}(D_1)$ 上 $\delta^1_{D_1}\le C\delta^1_{D_2}$ なる条件は

$$k^1_{D_1}(x,y)\le Cj_{D_1,D_2}(x,y)+C',\quad x,y\in D_1$$

とあらわすこともできる. 特に $D_2=\mathbf{R}^n$ なる場合については $\delta^\phi_{\mathbf{R}^n}\approx\psi^\phi$ なので

**系 3.** ([10]) $\mathbf{R}^n$ の真部分領域 $D$ が $BMO_{1,loc}$ 拡張領域となるための必要十分条件は

$$W^1_D(Q,Q')\le C\log\left(1+\frac{l(Q)+l(Q')+d(Q,Q')}{\min\{l(Q),l(Q')\}}\right),\qquad Q,Q'\in\mathcal{D}(D).$$

となることである. またこの条件は

$$k^1_D(x,y)\le C'\log\left(1+\frac{|x-y|}{d(x,\partial D)}\right)\left(1+\frac{|x-y|}{d(y,\partial D)}\right)+C'',\qquad x,y\in D$$

とも同値である.

この条件を満たす領域は一様領域と呼ばれる. 一様領域は擬等角写像等を通して $BMO$ 空間と深いつながりがある (cf. [1], [2], [4], [14]). 最後に

**定理 13.** 一様領域 $D\subset\mathbf{R}^n$ に対しては

$$\delta^\phi_D(Q,Q')\approx\psi^\phi(Q,Q'),\qquad Q,Q'\in\mathcal{A}(D),$$

また $D\ne\mathbf{R}^n$ ならば

$$W^\phi_D(Q,Q')\approx\psi^\phi(Q,Q'),\qquad Q,Q'\in\mathcal{D}(D),$$

特に $\phi\in(B_0)$ であれば上式から

$$\hat\rho^\phi_D(x,y)\le C\lim_{\substack{\mathcal{A}(D)\ni Q\to x\\ \mathcal{A}(D)\ni Q\to y}}\delta^\phi_D(Q,Q')\le C\lim_{\substack{\mathcal{A}(D)\ni Q\to x\\ \mathcal{A}(D)\ni Q\to y}}\psi^\phi(Q,Q')\le C\int_0^{|x-y|}\phi(t)t^{-1}dt\le C\phi(|x-y|).$$

よって定理 11 より

**系 4.** ([11]) $\phi\in(B_0)$ であれば一様領域は常に $\Lambda_{\phi,loc,loc}$ 拡張領域である.

## References


[ 1 ] F. W. Gehring, Charastaristic properties of quasidisks, Séminaire de Mathématiques Supérieures, 84, Presses del'Université de Montreal, Que., 1982.

[ 2 ] F. W. Gehring, Uniform domains and the Ubiquitous Quasidisk, Jahresber. Deutsch. Math.-Verein., 89 (1987), 88-103.

[ 3 ] F. W. Gehring, Lipsctitz classes and quasiconformal mappings, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math., 10 (1985), 203-219.

[ 4 ] F. W. Gehring and B. G. Osgood, Uniform domains and the quasi-hyperbolic metric, J. Analyse. Math., 36 (1979), 50-74.

[ 5 ] Y. Gotoh, $BMO$ extension theorem for relative uniform domains, J. Math. Kyoto Univ., to appear.

[ 6 ] Y. Gotoh, Remarks on multipliers for $BMO$ on general domains, Kodai Math. J., to appear.

[ 7 ] Y. Gotoh, On localization theorem for $BMO_\phi$ on general domains, to appear.

[ 8 ] Y. Gotoh, On $BMO_\phi$ multiplier on general domain, to appear.

[ 9 ] S. Janson, On functions with conditions on the mean oscillation, Ark. Mat., 14 (1976), 189-196.

[10] P. Jones, Extension theorems for $BMO$, Indiana Univ. Math. J., 29 (1980), 41-66.

[11] V. Lappalainen, $Lip_h$-extension domains, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math., 56 (1985), 1-52.

[12] E. Nakai, Pointwise multipliers for functions of weighted bounded mean oscillation, to appear in Studia Math. 102.

[13] E. Nakai and K. Yabuta, Pointwise multipliers for functions of bounded mean oscillation, J. Math. Soc. Japan, 37 (1985), 207-218.

[14] H. M. Reimann, Functions of bounded mean oscillation and quasiconformal mappings, Comm. Math. Helv., 49 (1974), 260-276.

[15] H. M. Reimann and T. Rychener, Funktionen beschränkter mittelerer Oszillation, Lecture Notes in Math. 489, Springer, 1975.

[16] S. Spanne, Some function spaces defined using the mean oscillation over cubes, Ann. Scuola Norm. Sup. Piza, 19 (1965), 593-608.

[17] S. G. Staples, $L^p$-averaging domains and the Poincaré inequality, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math., 14 (1989), 103-127.

[18] D. A. Stegenga, Bounded Toeplitz operators on $H^1$ and applications of duality between $H^1$ and the functions of bounded mean oscillation, Amer. J. Math., 98 (1976), 573-589.